Chapitre 1

Système thermodynamique et premier principe

1.3 Fonction d'état : élastique

☆☆☆☆ Un élastique de longueur L est une fonction $L\left(T,f\right)$ de sa température T et des forces de norme f exercées sur ses extrémités afin de l'étirer. L'étirement de l'élastique est caractérisé par deux propriétés physiques :

1) le coefficient de dilatation à force constante $\alpha_f = \dfrac{1}{L}\dfrac{\partial L\left(T,f\right)}{\partial T}$,
2) le coefficient de compressibilité à température constante $\chi_T = \dfrac{1}{L}\dfrac{\partial L\left(T,f\right)}{\partial f}$.

On considère que la longueur $L\left(T,f\right)$ de l'élastique est une fonction linéaire de la température T et de la force f dans la limite où ces grandeurs varient peu, c'est-à-dire $\Delta T \ll T$ et $\Delta f \ll f$. Dans cette limite, déterminer la variation de longueur ΔL de l'élastique pour une variation ΔT de la température et une variation Δf des forces appliquées.

1.4 Fonction d'état : volume

☆☆☆☆ Un récipient de forme conique avec un angle d'ouverture α autour de l'axe vertical est rempli de liquide incompressible (fig. 1.1). Le liquide entre dans le cône à vitesse constante v en passant par un tube circulaire de diamètre d attaché à la base du cône. Lorsque la surface circulaire du liquide a un rayon $R\left(h\left(t\right)\right)$ et se trouve à hauteur $h\left(t\right)$ dans le cône, le volume de liquide dans le cône est,

$$V\left(t\right) = \frac{1}{3}\,\pi\,R^2\left(h\left(t\right)\right)h\left(t\right)$$

où on a fait l'approximation que $d \ll R\left(h\left(t\right)\right)$. Initialement, il n'y a pas de liquide dans le cône, c'est-à-dire $h\left(0\right) = 0$.

Déterminer la dérivée temporelle du volume de liquide $\dot{V}\left(t\right)$ dans le récipient et en déduire la hauteur $h\left(t\right)$.

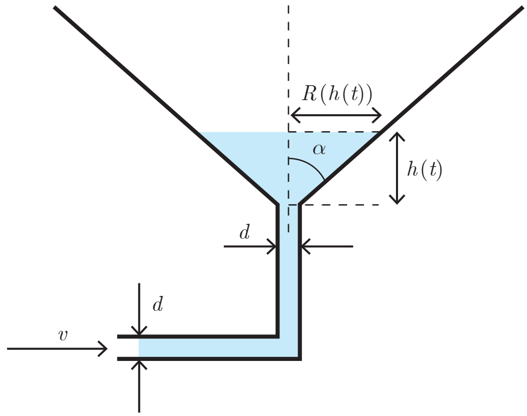

Fig. 1.1 Un liquide pénètre dans un entonnoir à vitesse constante v en passant par un tube de diamètre d. L'entonnoir est un cône d'angle d'ouverture α. L'axe du cône est vertical.

1.8 Concentration de sel dans une baignoire

Une baignoire contient $N_s(t)$ moles de sel dissoutes dans $N_e(t)$ moles d'eau. Un courant d'eau douce constant $I_e^{\text{in}} > 0$ entre dans la baignoire. On suppose que l'eau est complètement brassée dans la baignoire de sorte que la concentration de sel peut être considérée comme homogène. Un courant d'eau salée constant $I_{es}^{\text{out}} = I_s^{\text{out}}(t) + I_e^{\text{out}}(t)$ sort de la baignoire qui fuit, où $I_s^{\text{out}}(t) < 0$ et $I_e^{\text{out}}(t) < 0$ sont les courants sortants de sel et d'eau. Déterminer la concentration de sel,

$$c_s(t) = \frac{N_s(t)}{N_s(t) + N_e(t)}$$

comme fonction du temps t compte tenu des conditions initiales $N_s(0)$ et $N_e(0)$.

1.9 Capillarité : angle de contact

Pour tenir compte des effets de capillarité, on considère que l'énergie interne d'un système contient des contributions qui sont proportionnelles aux aires des interfaces entre les différentes parties du système. Pour une goutte de liquide mouillant une surface horizontale (fig. 1.3), on suppose que le liquide a une forme de calotte sphérique. Alors, l'énergie interne est exprimée comme $U(h,R) = (\gamma_{s\ell} - \gamma_{sg})\,\pi a^2 + \gamma_{\ell g}\,A$ où $a = R\sin\theta = \sqrt{2Rh - h^2}$ est le rayon et $A = 2\pi Rh$ est l'aire latérale de la calotte sphérique de liquide de hauteur h obtenue en tronquant la sphère de rayon R avec la surface horizontale du substrat solide. Les paramètres $\gamma_{s\ell}$, γ_{sg}, $\gamma_{\ell g}$ caractérisent les substances et sont

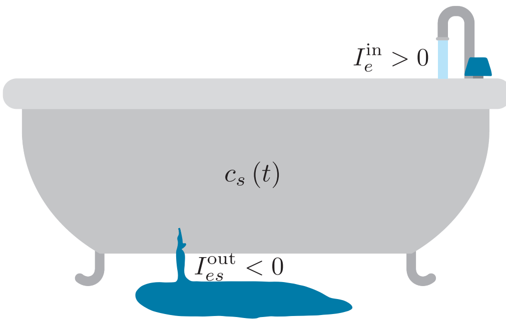

Fig. 1.2 Un courant d'eau constant $I_e^{\text{in}} > 0$ entre dans la baignoire et un courant d'eau salée constant en sort $I_{es}^{\text{out}} < 0$ en raison d'une fuite. La concentration de sel dans la baignoire est $c_s(t)$.

indépendants de la forme de la goutte. Montrer que l'angle de contact θ est donné par,

$$(\gamma_{s\ell} - \gamma_{sg}) + \gamma_{\ell g} \cos\theta = 0$$

en minimisant l'énergie interne $U(h, R)$ compte tenu de la condition que le volume $V(h, R) = \frac{\pi}{3} h^2 (3R - h) = V_0$ de la calotte sphérique de liquide est constant.

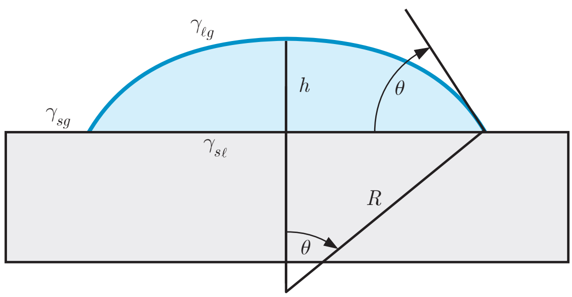

Fig. 1.3 Une goutte de liquide sur un substrat horizontal a une forme de calotte sphérique. L'angle θ est appelé angle de contact. Une tension superficielle est définie pour les trois interfaces : solide-liquide ($\gamma_{s\ell}$), solide-gaz (γ_{sg}) et liquide-gaz ($\gamma_{\ell g}$).

1.10 Énergie : thermodynamique et mécanique

★★☆☆ Un poids de masse M est suspendu à un fil. La tension $\boldsymbol{T}$ dans le fil est telle que le poids descend verticalement avec une vitesse $\boldsymbol{v}$ qui peut varier au cours du temps.

1) Déterminer la dérivée temporelle de l'énergie mécanique E_{mec} qui est la somme des énergies cinétique et potentielle.

2) Déterminer la dérivée temporelle de l'énergie E du système d'après le premier principe de la thermodynamique (1.18).

1.11 Oscillateur harmonique amorti

Un système isolé constitué d'un point matériel de masse M attaché à un ressort de constante élastique k est immergé dans un fluide visqueux homogène et immobile. Le point matériel est soumis à une force de frottement visqueux en régime laminaire $\boldsymbol{F}_f\,(t) = -\,\lambda\,\boldsymbol{v}\,(t)$ où $\boldsymbol{v}\,(t)$ est la vitesse du point matériel et où $\lambda > 0$. Le frottement visqueux interne entre le point matériel et le fluide est caractérisé par une variable d'état extensive scalaire $S\,(t)$. La fonction d'état intensive conjuguée à la variable $S\,(t)$ est,

$$T\,(t) = \frac{dU\,(S\,(t))}{dS\,(t)}$$

Le facteur d'amortissement γ et la pulsation ω_0 des oscillations non amorties sont définis comme,

$$\gamma = \frac{\lambda}{2M} \qquad \text{et} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$$

Le mouvement rectiligne du point matériel a lieu le long de l'axe Ox. La position d'équilibre du ressort coïncide avec l'origine O. Ainsi, en régime d'amortissement faible où $\gamma \ll \omega_0$, la coordonnée de position $x\,(t)$ s'écrit,

$$x\,(t) = A\,e^{-\,\gamma t}\cos\left(\omega_0 t + \phi\right)$$

où A est l'amplitude maximale du mouvement oscillatoire et où ϕ est un angle de déphasage. En régime d'amortissement faible,

1) déterminer l'équation du mouvement harmonique amorti le long de l'axe Ox ;
2) déterminer l'énergie $E\,(S\,(t)\,,t)$ du système ;
3) déterminer la dérivée temporelle de la variable d'état extensive $\dot{S}\,(t)$.